1 基础建模与模型转换

1.1 基本判断

- 线性：满足叠加性与齐次性；方程中变量及其导数只作线性组合。
- 定常：微分方程或差分方程系数不显含时间。
- 零状态传递函数：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}\Big|_{\text{零初值}}$$

1.2 状态空间

$$\dot{x}=Ax+Bu,\qquad y=Cx+Du$$

- A：系统矩阵；B：输入矩阵；C：输出矩阵；D：前馈矩阵。
- 常见状态变量：电容电压、电感电流、质量速度、弹簧位移、液位高度。
- 若输入阶次低于输出阶次，通常 $D=0$。

1.3 闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)},$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$1+G(s)H(s)=0\quad \text{为闭环特征方程}$$

- 串联相乘，并联相加，负反馈 $G/(1+GH)$，正反馈 $G/(1-GH)$。
- 闭环极点由特征方程决定；闭环零点由前向通道零点和反馈通道极点共同决定。

1.4 方块图与信号流图

- 综合点和引出点前后移：移动前后信号关系不变。
- 相邻同性质点可交换；不同性质点交换需补偿传递函数。
- 梅森公式：

$$M=\frac{Y}{R}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$$

$$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_m+\cdots$$

- P_k：第 k 条前向通路增益；L_i：带正负号的回路增益。Δ 中乘积只取两两互不接触回路。
- Δ_k：从 Δ 中删去所有与第 k 条前向通路接触的回路项；若该通路接触所有回路，则 $\Delta_k=1$。
- 顺序：列前向通路、单回路、互不接触回路组，再求 Δ_k 并代入。

1.5 传递函数与标准型

输入无微分项可取 $x_1=y,x_2=\dot{y},\ldots,x_n=y^{(n-1)}$；一般情形直接按分子、分母系数构造标准型。方块图则优先选一阶环节输出为状态。

由状态空间到传递函数

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

SISO 时 B,C 为向量；MIMO 时 $G(s)$ 为传递函数矩阵，矩阵乘法顺序不可交换。

若

$$G(s)=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

令 $d=b_n$，$\bar{b}_i=b_i-a_id\ (i=0,\ldots,n-1)$；严格真分式时 $d=0$。

能控（相伴）标准型

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$B_c=[0\ \cdots\ 0\ 1]^{\mathsf T},\quad C_c=[\bar{b}_0\ \cdots\ \bar{b}_{n-1}],\quad D=d$$

能观标准型

$$A_o=A_c^{\mathsf T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & -a_1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$B_o=C_c^{\mathsf T},\quad C_o=B_c^{\mathsf T}=[0\ \cdots\ 0\ 1],\quad D=d$$

总体状态方程与对应关系

$$\dot{x}_c=A_cx_c+B_cu,\qquad y=C_cx_c+du,$$
$$\dot{x}_o=A_ox_o+B_ou,\qquad y=C_ox_o+du.$$

$$A_o=A_c^{\mathsf T},\qquad B_o=C_c^{\mathsf T},$$
$$C_o=B_c^{\mathsf T},\qquad D_o=D_c=d.$$

1.6 线性化

在工作点附近取增量：

$$\Delta\dot{x}=A\Delta x+B\Delta u,$$

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0,\quad B=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_0$$

非线性静态关系 $y=f(x)$：$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$。

1.7 典型对象模板

- RLC：

$$v_R(t)=Ri_R(t),\qquad v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int i_C(t)\mathrm{d}t$$

$$V_R=RI_R,\quad V_L=LsI_L,\quad V_C=\frac{I_C}{Cs}$$

KVL：回路电压代数和为 0；KCL：节点电流代数和为 0。

- 直流电机/转动：

$$u=Ri+L\dot{i}+K_e\omega,\quad T=K_ti,$$
$$J\dot{\omega}+B\omega=T-T_L$$

- 机械平动：

$$f_M=M\ddot{x},\qquad f_B=B(\dot{x}_e-\dot{x}_f),$$
$$f_K=K(x_c-x_d)$$

- 液位：

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=q_{in}-q_{out},\qquad q_{out}\approx\frac{h}{R}$$

- 热力：$C\dot{\theta}=q_{in}-q_{out}$，热阻 $q=(\theta_1-\theta_2)/R$。

2 时域分析与状态求解

2.1 典型输入

$$\text{单位脉冲：}\delta(t)\leftrightarrow 1,\quad \text{单位阶跃：}1(t)\leftrightarrow\frac{1}{s},$$

$$\text{单位斜坡：}t\leftrightarrow\frac{1}{s^2},\quad \text{单位加速度：}\frac{t^2}{2}\leftrightarrow\frac{1}{s^3}$$

$$y(t)=y_{ss}(t)+y_t(t),\qquad Y(s)=G(s)R(s)$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to0}sY(s)$$

2.2 一阶系统

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

- 阶跃响应：$y(t)=1-\mathrm{e}^{-t/T}$。
- $T_d\approx0.69T$，$T_r\approx2.20T$。
- $T_s\approx3T$（5%），$T_s\approx4T$（2%）。

2.3 二阶系统

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$$

$$s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2=0$$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- $0<\zeta<1$ 欠阻尼，$\zeta=1$ 临界阻尼，$\zeta>1$ 过阻尼。
- $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

2.4 欠阻尼指标

$$y(t)=1-\frac{\mathrm{e}^{-\zeta\omega_nt}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\theta(t),$$

$$\theta(t)=\omega_dt+\arccos\zeta,\quad 0<\zeta<1$$

- T_r 上升时间，T_p 峰值时间，T_s 调节时间。
- σ 最大超调量/超调率，ω_d 阻尼振荡角频率。

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_d},\qquad \sigma=\mathrm{e}^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_s\approx\frac{3}{\zeta\omega_n}\ (5\%),\qquad T_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}\ (2\%)$$

$$T_r=\frac{\pi-\arccos\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\approx\frac{2.16\zeta+0.60}{\omega_n}$$

反推与衰减比

- 已知 σ,T_p：先由超调公式求 ζ，再由 $\omega_d=\pi/T_p$，$\omega_n=\omega_d/\sqrt{1-\zeta^2}$。
- 衰减比 $n=\frac{y_1-y_\infty}{y_2-y_\infty}=\mathrm{e}^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$；$4{:}1\Rightarrow n=4$。
- 单位反馈二阶开环：$G(s)=\omega_n^2/[s(s+2\zeta\omega_n)]$。

2.5 拉氏反变换

$$\frac{A}{s-p}\leftrightarrow A\mathrm{e}^{pt},$$

$$\frac{A}{(s-p)^r}\leftrightarrow\frac{A}{(r-1)!}t^{r-1}\mathrm{e}^{pt}$$

$$\sigma\pm\mathrm{j}\omega_d\Rightarrow A\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega_dt+\varphi)$$

部分分式重根系数：

$$A_r=\frac{1}{(m-r)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{m-r}}{\mathrm{d}s^{m-r}}(s-p)^mF(s)\right]_{s=p}$$

2.6 高阶近似

- 主导极点：距虚轴近，且附近无强影响零极点。
- 远离主导极点的极点影响小；零点常使响应加快、超调增大。
- 无主导极点时优先用频域指标或直接分解求响应。

2.7 误差积分指标

$$J_1=\int_0^\infty e^2(t)\mathrm{d}t,\quad J_2=\int_0^\infty te^2(t)\mathrm{d}t$$

$$J_3=\int_0^\infty|e(t)|\mathrm{d}t,\quad J_4=\int_0^\infty t|e(t)|\mathrm{d}t$$

2.8 状态方程求解

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

- 若 $A=T\Lambda T^{-1}$，则 $\mathrm{e}^{At}=T\mathrm{e}^{\Lambda t}T^{-1}$。
- $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$，$\Phi(0)=I$，$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$。
- $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$；定常系统 $\Phi(t,\tau)=\mathrm{e}^{A(t-\tau)}$。

3 稳定性与稳态误差

3.1 劳斯判据

劳斯表的对象是闭环特征方程 $Q(s)=0$ 的左端多项式，**不是传递函数 $G(s)$ 本身**。负反馈时，若开环传递函数

$$G_o(s)=G(s)H(s)=\frac{N_o(s)}{D_o(s)},$$

$$1+G_o(s)=0,$$
$$Q(s)=D_o(s)+N_o(s).$$

正反馈则 $Q(s)=D_o(s)-N_o(s)$。若题目直接给闭环传递函数 $\Phi(s)=N_c(s)/D_c(s)$，则取闭环分母 $Q(s)=D_c(s)$；状态空间则 $Q(s)=\det(sI-A)$。清除分式并按 s 降幂整理为

$$Q(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

再将这些系数填入劳斯阵列（可先令首项系数为正）。

- 必要非充分：系数同号且非零。
- 充要：劳斯阵列首列无符号变化。
- 二阶：系数同号；三阶：$a_2a_1>a_3a_0$ 且系数全正。

劳斯阵列骨架

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots\\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots\\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\end{array}$$

$$b_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}},$$

$$b_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$$

右半平面根数 = 首列符号变化次数。

特殊情况

1. 普通：首列无零，直接数首列符号变化。
2. 首列首元为 0，但本行还有非零项：
   - 不能除以 0；令该首元为 $\varepsilon>0$，继续列阵，最后按 $\varepsilon\to0^+$ 判断首列符号。
   - 等价法 1：令 $s=1/x$，整理为 $Q_x(x)=x^nQ(1/x)$ 后重列劳斯阵。
   - 等价法 2：用 $Q(s)(s+1)$ 重列；因 $s=-1$ 为稳定根，右半平面根数不变。
   - 若倒变量后系数顺序不变，可能仍遇到首元 0，该法无效。
3. 某一行全为 0：
   - 表明存在关于原点对称的根：$\pm\sigma$，$\pm\mathrm{j}\omega$ 或成对二次因子。
   - 若 s^i 行全零，用上一非零行系数 $\beta_1,\beta_2,\cdots$ 构造辅助多项式
   $$U(s)=\beta_1s^{i+1}+\beta_2s^{i-1}+\beta_3s^{i-3}+\cdots.$$
   - 用 $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$ 的系数替代全零行，再继续列阵；$U(s)=0$ 的根即对称根/虚轴根。
   - 替代后若首列无变号，但 $U(s)$ 有 $\pm\mathrm{j}\omega$，则无右半平面根但有虚轴根：临界稳定，非渐近稳定。

临界与相对稳定

- 参数边界：令首列某元素 $=0$，常对应全零行/等幅振荡。
- 三阶临界：$a_2a_1=a_3a_0$ 时 s^1 行全零，$U(s)=a_2s^2+a_0$，$\omega=\sqrt{a_0/a_2}$。
- 相对稳定：令 $s=z-\sigma$，若新劳斯阵首列全正，则所有根在直线 $s=-\sigma$ 左侧。

3.2 系统型别

开环传递函数含原点极点个数为型别。单位负反馈误差定义：

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\Phi_e(s)R(s)$$

$$G(s)=\frac{K\prod(T_is+1)}{s^\nu\prod(T_js+1)}\Rightarrow\nu=\text{系统型别}$$

3.3 误差系数

$$K_p=\lim_{s\to0}G(s),\qquad K_v=\lim_{s\to0}sG(s),$$

$$K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)$$

输入	0型	1型	2型
$1(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
t	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$\frac{t^2}{2}$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

3.4 非单位反馈

先化为等效单位反馈：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G_e(s)}{1+G_e(s)}$$

再用 $G_e(s)$ 判断型别和误差系数。

3.5 扰动误差

多输入系统用叠加原理：分别令其他输入为零，求各误差分量，再相加。

$$E(s)=E_r(s)+E_n(s)+E_d(s)$$

若扰动从中间节点进入，先写出该扰动到输出或误差的闭环传递函数，再用终值定理。

3.6 精度改善

- 增大型别：可降低阶跃/斜坡/抛物线稳态误差。
- 增大开环增益：提高 K_p,K_v,K_a，但可能降低稳定裕度。
- 改变结构：前馈、复合控制、积分环节、校正网络。

4 根轨迹分析与设计

4.1 基本条件

闭环特征方程：

$$1+G(s)H(s)=0$$

$$|G(s)H(s)|=1,$$
$$\angle G(s)H(s)=(2k+1)\pi$$

正反馈或零度根轨迹使用 $\angle G(s)H(s)=2k\pi$。

4.2 由轨迹点求开环增益

先确认候选闭环极点 s_d 满足相角条件。若零极点形式为

$$G_o(s)=K_rG_0(s)=K_r\frac{\prod_j(s-z_j)}{\prod_i(s-p_i)},$$

则由幅值条件

$$K_r=\frac{1}{|G_0(s_d)|}=\frac{\prod_i|s_d-p_i|}{\prod_j|s_d-z_j|}.$$

若特征方程已写成 $D(s)+K_rN(s)=0$，也可直接用

$$K_r=\left|\frac{D(s_d)}{N(s_d)}\right|.$$

时间常数形式中的开环放大系数 K_0 与根轨迹增益 K_r 一般不同：

$$G_o(s)=\frac{K_0\prod_j(1+T_{zj}s)}{s^\nu\prod_i(1+T_{pi}s)},$$

$$K_r=K_0\frac{\prod_jT_{zj}}{\prod_iT_{pi}}.$$

故 $K_0=K_r\prod_iT_{pi}/\prod_jT_{zj}$；若原式已是零极点首一形式，则 $K_0=K_r$。

4.3 做题流程：已知开环传递函数

1. 化标准形：写成 $G_o(s)=K_r\prod(s-z_j)/\prod(s-p_i)$，列出开环零点、极点，并分清根轨迹增益 K_r 与原开环放大系数 K_0。
2. 写特征方程：负反馈用 $1+G_o(s)=0$。先看 $K_r>0$（180° 根轨迹）还是 $K_r<0$（0° 根轨迹）。
3. 定基本形状：标出起点、终点和分支方向；实轴上按右侧零极点个数的奇偶性确定根轨迹区段。
4. 求无穷远分支：当极点 $n>$ 零点 m 时，计算 $n-m$ 条渐近线的交点与角度。
5. 求特殊点：由 $\mathrm{d}K_r/\mathrm{d}s=0$ 求分离/会合点；只保留位于根轨迹上且增益符号正确的解。
6. 有复极点时，用相角条件求出射角或入射角。
7. 求虚轴交点及稳定范围：可令 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入特征方程，或对含 K_r 的闭环特征多项式列 Routh 表。
8. 按 $K_r:0\to\infty$ 画箭头并完成草图；若只问稳定范围，通常直接用 Routh 更快。
9. 若给性能指标，先由 ζ,T_s,T_p 等确定期望闭环极点 s_d，检查相角条件，再用幅值条件求 K_r，必要时换算 K_0，最后求其余闭环极点并检查主导性。

4.4 7 条绘制法则

作图/计算对象

- 开环：$L=GH=KG_0$，$G_0=N/D$：用其零极点作图。
- 闭环：$\Phi=G/(1+GH)$；轨迹点为 $\Delta=D+KN=0$ 的根。
- 参数：若 $\Delta=A+\lambda B=0$，作 $W=B/A$。

1. 起点/终点：始于开环极点，终于开环零点或无穷远。
2. 分支/对称/连续：分支数 $N=\max(n,m)$，关于实轴对称且连续。
3. 渐近线：当 $n>m$ 时有 $n-m$ 条：
$$\theta_k=\frac{(2k+1)\pi}{n-m},\qquad \sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}$$
4. 实轴根轨迹：测试点右侧实零极点数为奇数。
5. 分离/会合点：必在根轨迹上，且满足
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=0\quad\text{或}\quad\sum_i\frac{1}{s-p_i}=\sum_j\frac{1}{s-z_j}$$
分离角：l 条分支离开时，相邻方向夹角约为 $2\pi/l$。
6. 起始角/终止角：用相角条件在复极点或复零点邻域求。
7. 虚轴交点：令 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入特征方程，或用劳斯判据。

补充法则

- 交叉点：若 $W(s)$ 的前 $q-1$ 阶导数为零，则有 q 条分支相交并分离。
- 根之和守恒：若开环传递函数满足 $m\le n-2$，增益变化时闭环根之和为常数。

4.5 起始角与终止角

从复极点 p_k 出发：

$$\theta_d=(2h+1)\pi+\sum_i\angle(p_k-z_i)-\sum_{i\ne k}\angle(p_k-p_i)$$

到复零点 z_k 的入射角：

$$\theta_a=(2h+1)\pi-\sum_{i\ne k}\angle(z_k-z_i)+\sum_i\angle(z_k-p_i)$$

4.6 参数根轨迹

把特征方程整理为

$$1+\lambda G_e(s)=0$$

其中 λ 为变化参数；等效根轨迹只保证闭环极点分析，不一定保持闭环零点。

4.7 正反馈与纯滞后

- 正反馈：$1-GH=0$，实轴规则改为右侧实零极点数为偶数。
- 纯滞后 $\mathrm{e}^{-\tau s}$ 可用 Pade 近似：
$$\mathrm{e}^{-\tau s}\approx\frac{1-\tau s/2}{1+\tau s/2}$$
- 纯滞后通常降低稳定性，使相角额外减少 $-\omega\tau$。

4.8 稳定范围

- 根轨迹穿越虚轴处对应临界稳定。
- 由劳斯阵列求 K 的稳定区间更快。
- 有零极点对消时，对消的闭环极点仍需纳入稳定性判断。

4.9 性能与补偿

- 主导极点：离虚轴近，附近无强影响零极点。
- 不超调：闭环主导极点为实根或近似 $\zeta\ge 1$；分离点常是临界 K。
- 增加零点一般使根轨迹左偏，响应加快、超调可能增加。
- 增加极点一般使根轨迹右偏，响应变慢、稳定性变差。

$$\zeta=\cos\theta,\quad \sigma=-\zeta\omega_n,\quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

5 频率响应与稳定判据

5.1 频率特性

$$G(\mathrm{j}\omega)=P(\omega)+\mathrm{j}Q(\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$
$$A(\omega)=|G(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{P^2+Q^2},$$
$$\phi(\omega)=\operatorname{atan2}(Q,P)$$
$$L(\omega)=20\lg A(\omega),\qquad s=\mathrm{j}\omega$$

5.2 Bode 典型环节

$$L(\omega)=L(\omega_0)+k\lg\frac{\omega}{\omega_0}=k\lg\omega+b$$

k 为斜率（dB/dec），常取 $0,\pm20,\pm40,\cdots$。

环节	$L(\omega)$	$\phi(\omega)$
K	$20\lg K$	0°
s	$20\lg\omega$	90°
$\frac{1}{s}$	$-20\lg\omega$	-90°
$Ts+1$	$20\lg\lvert 1+\mathrm{j}\omega T\rvert$	$\arctan\omega T$
$\frac{1}{Ts+1}$	$-20\lg\lvert 1+\mathrm{j}\omega T\rvert$	$-\arctan\omega T$

模值直接计算

若开环频率特性分解为

$$G_o(s)=Ks^{-\nu}\mathrm{e}^{-\tau s}\frac{\prod_i(1+T_{zi}s)}{\prod_j(1+T_{pj}s)},\quad K>0,$$

令 $M_{zi}=\sqrt{1+(\omega T_{zi})^2}$, $M_{pj}=\sqrt{1+(\omega T_{pj})^2}$，则

$$|G_o(\mathrm{j}\omega)|=K\omega^{-\nu}\frac{\prod_i M_{zi}}{\prod_j M_{pj}}$$

绘制步骤

1. 分解典型环节，列转折频率。
2. 低频由型别和增益决定起始斜率。
3. 每过一阶惯性极点斜率减 20 dB/dec；每过一阶微分零点斜率加 20 dB/dec。
4. 相频曲线按各环节相角叠加。

常用斜率与相角

- K/s^ν：低频斜率 -20ν dB/dec，相角 $-\nu 90^\circ$。
- $(1+Ts)$：过 $\omega=1/T$ 后斜率 $+20$ dB/dec。
- $1/(1+Ts)$：过 $\omega=1/T$ 后斜率 -20 dB/dec。
- $(1+2\zeta Ts+T^2s^2)^{-1}$：过 $\omega_n=1/T$ 后斜率 -40 dB/dec。

真实值偏差

一阶零点转折处比渐近线高 $+3$ dB；一阶极点低 -3 dB。远离转折频率可直接用渐近线。

5.3 二阶振荡环节

$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

令 $u=\omega/\omega_n=\omega T$，则完整频率特性为

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\zeta u)^2}},$$
$$\phi_2(\omega)=-\operatorname{atan2}(2\zeta u,1-u^2).$$

若只用普通反正切，必须修正象限：

$$\phi_2=\begin{cases}-\arctan\dfrac{2\zeta u}{1-u^2}, & u<1,\\ -90^\circ, & u=1,\\ -180^\circ+\arctan\dfrac{2\zeta u}{u^2-1}, & u>1.\end{cases}$$

$$\omega_n=\frac{1}{T},$$
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\quad(\zeta<0.707)$$
$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$
$$L(\omega_n)=-20\lg(2\zeta),\qquad \phi(\omega_n)=-90^\circ$$

当 $\zeta<0.707$ 有谐振峰；ζ 越小，峰值越高、超调越大。

5.4 二阶微分环节

$$G(s)=T^2s^2+2\zeta Ts+1$$

- 斜率最终增加 $+40$ dB/dec，相角最终趋于 $+180^\circ$。
- 若 $\zeta<0.707$，幅频先降后升，对应反谐振谷。

5.5 极坐标图要点

- 惯性环节 $(1+\mathrm{j}\omega T)^{-1}$ 为圆弧。
- 一阶微分环节 $1+\mathrm{j}\omega T$ 实部恒为 1。
- 最小相位环节与非最小相位环节幅频相同，相角关于实轴相反。
- 作图抓端点：$\omega\to0$、$\omega\to\infty$、与实轴/虚轴交点。

5.6 Nyquist 判据

$$Z=P-N$$

- P：开环右半平面极点数。
- N：Nyquist 曲线顺时针包围 $(-1,\mathrm{j}0)$ 的次数。
- 闭环稳定要求 $Z=0$。

若开环稳定 $P=0$，则 Nyquist 曲线不包围 $(-1,\mathrm{j}0)$ 才闭环稳定。若曲线穿过 $(-1,\mathrm{j}0)$，闭环临界稳定。

开环含积分环节

若 $G(s)H(s)$ 在原点有 m 重极点，Nyquist 闭合曲线需用小半圆绕开原点；低频端幅值趋于无穷，相角起始约 $-m90^\circ$。

5.7 稳定裕度

令 $G_o(s)=G(s)H(s)$，$L_o(\omega)=20\lg|G_o(\mathrm{j}\omega)|$，$\phi(\omega)=\angle G_o(\mathrm{j}\omega)$。

核心计算基准：逐因子算相角

先把 $G_o(s)$ 完全因式分解，再令 $s=\mathrm{j}\omega$。乘积相角相加，分式相角等于分子总相角减分母总相角：

$$\phi(\omega)=\sum\angle(\text{分子因子})-\sum\angle(\text{分母因子})$$

- 正常数 $K>0$：0°；负常数另加（或减）180°。
- 分子有 s^m：加 $m90^\circ$；分母有 s^ν：减 $\nu90^\circ$。故 $1/(\mathrm{j}\omega)^\nu\Rightarrow-\nu90^\circ$。
- 左半平面因子 $s+a$ $(a>0)$ ：$\angle(\mathrm{j}\omega+a)=\arctan(\omega/a)$。在分子就加，在分母就减。
- 标准因子 $1\pm\mathrm{j}\omega T$ 的相角为 $\pm\arctan(\omega T)$；若该因子在分母，再对其相角取负。
- 二阶因子先求 $\operatorname{atan2}(2\zeta u,1-u^2)$：在分子加、在分母减，并注意 $u>1$ 时的象限修正。
- $\mathrm{e}^{-\tau s}\Rightarrow-\omega\tau180^\circ/\pi$（$\omega\tau$ 原为弧度）。
- $1/\omega$ 是正实数，相角 0°；积分环节实际是 $1/(\mathrm{j}\omega)=-\mathrm{j}/\omega$，相角 -90°。

例如，若 $z,p,T>0$，

$$G_o(s)=\frac{K(s+z)\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(s+p)(1+Ts)},$$

则

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{\omega}{z}-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{p}-\arctan(\omega T)-\omega\tau\frac{180^\circ}{\pi}.$$

四个必背公式

$$|G_o(\mathrm{j}\omega_c)|=1\Longleftrightarrow L_o(\omega_c)=0\text{ dB},$$
$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c),$$
$$\phi(\omega_x)=-180^\circ,$$
$$h=\frac{1}{|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|},$$
$$h_{\mathrm{dB}}=20\lg h=-20\lg|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|=-L_o(\omega_x).$$

题型 A：已知系统，求裕度

求 γ：

1. 解出 ω_c：令 $|G_o(\mathrm{j}\omega_c)|=1$，即 $L_o(\omega_c)=0$ dB。
2. 将 ω_c 代入相角函数，求 $\phi(\omega_c)$。
3. 计算

$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c).$$

求 h_{dB}：

1. 解出 ω_x：令 $\phi(\omega_x)=-180^\circ$。
2. 将 ω_x 代入幅值函数，求 $|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|$ 或 $L_o(\omega_x)$。
3. 计算

$$h=\frac{1}{|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|},$$
$$h_{\mathrm{dB}}=-20\lg|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|=-L_o(\omega_x).$$

题型 B：已知裕度，反求 K/参数

若 $G_o(s)=K\bar G_o(s)$ 且 $K>0$：**已知 γ 求 K：**

1. 由相角要求 $\phi(\omega_c)=\gamma-180^\circ$ 解出 ω_c。此步与纯比例增益 K 无关。
2. 将 ω_c 代入 $|G_o(\mathrm{j}\omega_c)|=1$：

$$K=\frac{1}{|\bar G_o(\mathrm{j}\omega_c)|}.$$

已知 h_{dB} 求 K：

1. 由 $\phi(\omega_x)=-180^\circ$ 解出 ω_x。
2. 将 ω_x 代入幅值要求：

$$|G_o(\mathrm{j}\omega_x)|=10^{-h_{\mathrm{dB}}/20},$$
$$K=\frac{10^{-h_{\mathrm{dB}}/20}}{|\bar G_o(\mathrm{j}\omega_x)|}.$$

纯比例增益 $K>0$ 不改变 $\phi(\omega)$ 和 ω_x，只使 $L_o(\omega)$ 竖移 $20\lg K$，从而改变 ω_c。若未知参数改变零极点位置，则相角也含该参数，须联立相角与幅值条件。

稳定性速判

常规最小相位、单穿越系统：$\gamma>0^\circ,h_{\mathrm{dB}}>0$ 稳定；任一为 0 临界；任一小于 0 不稳定。非最小相位或多次穿越须用 Nyquist 判据。工程常用：$\gamma=45^\circ\sim60^\circ$，$h_{\mathrm{dB}}\ge6$ dB。

5.8 闭环频域指标

$$M_r=\max_\omega|\Phi(\mathrm{j}\omega)|,\quad \omega_b:\ |\Phi(\mathrm{j}\omega_b)|=\frac{|\Phi(0)|}{\sqrt2}$$

二阶系统：

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},$$
$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$
$$\sigma=\exp\left[-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}\right]$$

经验：$M_r\approx1.2\sim1.5$ 对应较合适的过渡过程。

5.9 开环指标关系

典型二阶开环

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$
$$\frac{\omega_c}{\omega_n}=\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{1/2}$$
$$\gamma=\arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}},\qquad \zeta\approx0.01\gamma$$

5.10 最小相位与滞后

- 最小相位：右半平面无零极点，且无纯滞后，增益为正。
- 最小相位系统可由幅频曲线唯一确定相频曲线。
- 纯滞后：$G_\tau(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$，幅值不变，相角减 $\omega\tau$。

实验确定传递函数

对数幅频直线段斜率：

$$L(\omega_a)-L(\omega_b)=k[\lg\omega_a-\lg\omega_b]$$

由斜率变化定位转折频率，由低频段确定增益与型别。

6 补偿器设计与速查

6.1 设计目标

- 稳：相位裕度不低于 45°，幅值裕度不低于 6 dB。
- 快：尽可能提高开环截止频率 ω_c。
- 准：低频段幅值高，提高稳态误差系数。
- 抗干扰：高频段幅值低，斜率足够陡。

按指标选方法

- 时域指标给定：用根轨迹设计较直接。
- 频域指标给定：用 Bode 图设计较直接。
- 稳态误差不满足：优先提高型别或低频增益，再校验稳定裕度。

6.2 频域与时域关系

二阶系统近似：

$$\frac{\omega_c}{\omega_n}=\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{1/2}$$
$$\gamma=\arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}},$$
$$\zeta\approx0.01\gamma$$
$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

高阶系统无主导极点时：

$$M_r\approx\frac{1}{\sin\gamma},\qquad T_s\approx\frac{K_0\pi}{\omega_c}$$
$$K_0=2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2$$

6.3 串联超前

$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts},\qquad \alpha>1$$
$$\phi_m=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1},\qquad \omega_m=\frac{1}{T\sqrt\alpha}$$

1. 按所需相位裕度估计补偿相角，加 $5^\circ\sim12^\circ$。
2. 由 ϕ_m 求 α。
3. 在原 Bode 图上找 $L(\omega_m)=-10\lg\alpha$。
4. 求 T，校验裕度。

- 作用：增加 ω_c 附近正相角，提高相位裕度和响应速度。
- 代价：高频增益增加，抗噪声能力可能变差。

超前设计流程

1. 按稳态误差确定开环增益 K。
2. 由当前 Bode 图求所需补偿相角 ϕ_m。
3. $\alpha=(1+\sin\phi_m)/(1-\sin\phi_m)$。
4. 令新 $\omega_c=\omega_m$，满足 $L_0(\omega_m)=-10\lg\alpha$。
5. $T=1/(\omega_m\sqrt\alpha)$，复核 γ,h。

6.4 串联滞后

$$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts},\qquad \beta>1$$

- 主要提高低频增益，改善稳态精度。
- 新截止频率附近相角损失要小，通常取 $\omega_c=(5\sim10)/T$。

$$\phi_m=-\arcsin\frac{\beta-1}{\beta+1},\qquad \omega_m=\frac{1}{T\sqrt\beta}$$

滞后设计流程

1. 按稳态误差确定所需低频增益。
2. 选择满足相位裕度的较低新截止频率 ω_c'。
3. 取 $20\lg\beta=-L_0(\omega_c')$。
4. 取 $1/T=(0.1\sim0.2)\omega_c'$，极点 $1/(\beta T)$ 更靠近原点。
5. 校验相角损失和稳态误差。

6.5 滞后-超前

$$G_c(s)=\frac{(1+\alpha T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_1s)(1+\beta T_2s)}$$

超前部分改善动态，滞后部分改善稳态；先由动态定超前，再由稳态定滞后。

6.6 根轨迹校正

- 超前校正：零点靠近原点，极点更靠左，提供正相角。
- 滞后校正：零极点靠近原点且相距小，主要改善稳态误差。
- 设计时先定期望主导极点，再用角度缺额确定校正零极点。

$$\angle G_c(s_d)=(2h+1)\pi-\angle G_0(s_d)$$

其中 $s_d=-\zeta\omega_n+\mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为期望主导极点。

6.7 PID

$$G_c(s)=K_p+\frac{K_i}{s}+K_ds$$
$$=K_p\left(1+\frac{1}{T_is}+T_ds\right)$$

比例加快响应；积分消除稳态误差；微分改善动态响应但放大高频噪声。

环节	主要作用	风险
P	加快、降误差	超调增大
I	消除静差	稳定性下降
D	预测、增阻尼	放大噪声

Ziegler–Nichols 临界比例法

令 $K_i=K_d=0$，增大 K_p 至临界振荡，得 K_u,T_u。

类型	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_u$	–	–
PI	$0.45K_u$	$T_u/1.2$	–
PID	$0.6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

6.8 常见判断

操作	静差/低频	相角/裕度	速度/代价
$K\uparrow$	误差 $\downarrow$	γ 常 $\downarrow$	$\omega_c\uparrow$
积分	型别 $\uparrow$	-90°	变慢
微分	静差不变	正相角	噪声 $\uparrow$
超前	影响小	$\gamma\uparrow$	$\omega_c\uparrow$
滞后	精度 $\uparrow$	小负相角	$\omega_c\downarrow$
纯滞后	幅值不变	$-\omega\tau$	稳定性 $\downarrow$

6.9 考试流程速查

求闭环稳定范围

1. 写闭环特征方程 $1+G(s)H(s)=0$。
2. 参数只在增益中：优先劳斯判据。
3. 要求根实部 $<-\sigma$：令 $s=z-\sigma$ 后劳斯。
4. 根轨迹题：虚轴交点对应临界增益。

求稳态误差

1. 确认闭环稳定，否则稳态误差无意义。
2. 单位反馈直接看开环 $G(s)$ 型别。
3. 非单位反馈先化等效单位反馈。
4. 扰动题用叠加，分别写扰动到 $E(s)$ 的通道。

画 Bode 图

1. 化为标准因子：$K,s^\nu,1+Ts,1+2\zeta Ts+T^2s^2$。
2. 低频起点：$20\lg K-20\nu\lg\omega$。
3. 逐个转折频率改斜率；相角逐项叠加。
4. 由 $L=0$ 得 ω_c，由 $\phi=-180^\circ$ 得 ω_x。

6.10 零极点判别

- 超前网络：零点 $-1/(\alpha T)$ 比极点 $-1/T$ 更靠近原点。
- 滞后网络：极点 $-1/(\beta T)$ 比零点 $-1/T$ 更靠近原点。
- 根轨迹补偿器常写 $K_c(s-z_c)/(s-p_c)$，比较 $|z_c|,|p_c|$ 判断。

6.11 裕度适用条件

- 相位裕度、幅值裕度主要用于最小相位系统。
- 非最小相位或纯滞后系统，裕度只能作参考，需回到 Nyquist 判据。
- 稳定裕度大：稳定性强但响应慢；ω_c 大：响应快但抗噪声变差。

6.12 频域估算

$$T_s\approx\frac{3.5}{\zeta\omega_n},\qquad \omega_cT_s\approx\frac{7}{\tan\gamma}$$
$$\sigma\approx0.16+0.4(M_r-1),\quad 1\le M_r\le1.8$$
$$\omega_b\uparrow\Rightarrow T_r,T_p,T_s\downarrow,\quad M_r\uparrow\Rightarrow\sigma\uparrow$$

6.13 易错点

- 开环稳定不等于闭环稳定；闭环稳定也不推出开环稳定。
- 零极点对消若对消了不稳定极点，内部稳定性仍可能有问题。
- 根轨迹增益 K^* 与实际开环比例系数 K 可能差一个常数因子。
- 20lg 只用于幅值；相角不能取对数。
- Bode 横轴是 $\lg\omega$，斜率单位是 dB/dec。

6.14 附录：常用变换

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$t\mathrm{e}^{-at}$	$1/(s+a)^2$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0),\qquad \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}$$

6.15 矩阵指数速查

$$A=\operatorname{diag}(\lambda_i)\Rightarrow\mathrm{e}^{At}=\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_it})$$
$$A=T\Lambda T^{-1}\Rightarrow\mathrm{e}^{At}=T\mathrm{e}^{\Lambda t}T^{-1}$$

二阶矩阵可用 Cayley–Hamilton：

$$\mathrm{e}^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

其中 α_i 由特征值代入求解。