材料力学（乙）公式汇总

目录

0. 常用符号与基本关系

- 轴力：F_N，剪力：F_S，扭矩：T，弯矩：M。
- 横截面面积：A，弹性模量：E，切变模量：G，泊松比：μ。
- 正应力：σ，切应力：τ，线应变：ε，切应变：γ。
- 许用应力：
$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}, \qquad [\tau] = \frac{\tau_u}{n}$$
- 极限应力与许用应力按材料区分：
  - **塑性材料（典型：低碳钢）**：极限应力取屈服极限 $\sigma_u = \sigma_s$；无明显屈服时取名义屈服极限 $\sigma_{p0.2}$。许用应力
$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s} \quad 或 \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{p0.2}}{n_s}.$$
  - **脆性材料（典型：铸铁）**：极限应力按拉、压分别取 σ_{bt}、σ_{bc}。许用应力
$$[\sigma_t] = \frac{\sigma_{bt}}{n_b}, \qquad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{bc}}{n_b}.$$

  其中 n_s 为按屈服确定的安全系数，n_b 为按强度极限确定的安全系数。脆性材料通常 $\sigma_{bc} \gg \sigma_{bt}$，所以拉、压应力要分别校核。
- 各向同性线弹性材料：
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$
- 强度校核的一般形式：
$$\sigma_{\max} \le [\sigma], \qquad \tau_{\max} \le [\tau]$$

0.1 正应力与剪应力的来源对比

直观理解：

- 正应力 σ：截面法线方向上的拉开或压紧，体现为“垂直截面”的拉压。
- 剪应力 τ：截面切线方向上的相对滑动，体现为“平行截面”的剪切。

正应力 σ 的常见来源：

来源	物理图像	公式
轴力拉压	杆件沿轴线被拉长或压短	$\sigma = \frac{F_N}{A}$
弯曲拉压	梁一侧受拉、另一侧受压	$\sigma = \frac{My}{I_z}$

剪应力 τ 的常见来源：

来源	物理图像	公式
圆轴扭转	横截面绕轴相对转动，材料沿圆周方向滑移	$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$
弯曲剪切	相邻横截面因剪力产生相对滑动	$\tau = \frac{VS_z^*}{I_z b} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$

危险点应力类型取决于内力：

- 只有轴力或弯矩时，通常主要校核 σ。
- 只有扭矩或剪力时，通常主要校核 τ。
- 弯扭、拉弯扭等组合变形中，危险点往往同时有 σ 和 τ，应进一步用主应力或第三、第四强度理论校核。

1. 轴向拉伸与压缩

1.1 横截面正应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

拉压杆强度条件：

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N,\max}}{A} \le [\sigma]$$

1.2 斜截面应力

单向拉压应力 σ_0 作用下，按课件中的斜截面角度 α：

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

最大正应力发生在横截面：

$$\sigma_{\max} = \sigma_0$$

最大切应力发生在 $\alpha = 45^\circ$：

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2}$$

1.3 轴向变形

胡克定律：

$$\sigma = E\varepsilon$$

轴向线应变：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

等截面、常轴力杆：

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

分段杆：

$$\Delta l = \sum_i \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i}$$

变截面或变轴力杆：

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_N(x)}{E(x)A(x)}\, dx$$

泊松比：

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

横向应变：

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

1.4 拉压应变能

等截面、常轴力：

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} F_N \Delta l = \frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{EA(\Delta l)^2}{2l}$$

单位体积应变能：

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

1.5 温度应力

自由热伸长：

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T\, l$$

完全约束时产生的热应力大小：

$$|\sigma_T| = E\alpha|\Delta T|$$

升温且伸长受阻时为压应力。

1.6 应力集中

理论应力集中系数：

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

其中 σ 为名义应力。

2. 剪切与挤压

2.1 剪切

平均切应力：

$$\tau = \frac{F_S}{A}$$

剪切强度条件：

$$\tau = \frac{F_S}{A} \le [\tau]$$

2.2 挤压

挤压应力：

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$$

挤压强度条件：

$$\sigma_{bs} \le [\sigma_{bs}]$$

常见销钉连接中，挤压面积取接触面的投影面积。

3. 扭转

3.1 外力偶矩与功率

功率 P 的单位为 kW，转速 n 的单位为 r/min 时：

$$M_e = 9549\frac{P}{n} \quad (\mathrm{N \cdot m})$$

工程计算中常取近似：

$$M \approx 9550\frac{P}{n} \quad (\mathrm{N \cdot m})$$

3.2 圆轴扭转应力

圆轴扭转变形几何关系：

$$\gamma_\rho = \rho\frac{d\varphi}{dx}$$

切应力分布：

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

最大切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{W_t}$$

扭转强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \le [\tau]$$

3.3 极惯性矩与抗扭截面系数

定义：

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA, \qquad W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$

实心圆轴：

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \qquad W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

空心圆轴，$\alpha = d/D$：

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

薄壁圆管，平均半径 r_0，壁厚 δ：

$$\tau = \frac{T}{2\pi r_0^2 \delta}$$

3.4 扭转变形与刚度

相对扭转角：

$$\varphi = \int_0^l \frac{T(x)}{GI_p(x)}\,dx$$

等截面、常扭矩：

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

分段常量：

$$\varphi = \sum_i \frac{T_i l_i}{G_i I_{pi}}$$

单位长度扭转角：

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p}$$

若用度每米：

$$\varphi'_{\mathrm{deg/m}} = \frac{180}{\pi}\frac{T}{GI_p}$$

扭转刚度条件：

$$\varphi' \le [\varphi']$$

3.5 矩形截面杆扭转

矩形截面边长 $h \ge b$，即 h 为长边、b 为短边：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}, \qquad \varphi' = \frac{T}{GI_t}$$

$$W_t = \alpha h b^2, \qquad I_t = \beta h b^3$$

系数 α, β 查表。窄长矩形 $h/b > 10$ 时：

$$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}$$

4. 弯曲内力

4.1 剪力、弯矩与分布载荷关系

按课件约定，向上的分布载荷 $q(x)$ 为正：

$$\frac{dF_S}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$$

积分形式：

$$F_S(b) - F_S(a) = \int_a^b q(x)\,dx$$

$$M(b) - M(a) = \int_a^b F_S(x)\,dx$$

4.2 图形规律

- 集中力使剪力图发生突变，突变量等于该集中力的代数值。
- 集中力偶使弯矩图发生突变，突变量等于该集中力偶的代数值。
- 均布载荷区段：剪力图为一次函数，弯矩图为二次函数。
- 弯矩极值通常出现在端点、集中力作用点、集中力偶作用点，或 $F_S = 0$ 的截面。

5. 平面图形几何性质

5.1 静矩与形心

对 z, y 轴的静矩：

$$S_z = \int_A y\,dA, \qquad S_y = \int_A z\,dA$$

形心坐标：

$$y_c = \frac{S_z}{A}, \qquad z_c = \frac{S_y}{A}$$

组合截面：

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}, \qquad z_c = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}$$

常见形心位置：

- 矩形 $b \times h$：形心在几何中心，

$$\bar{x} = \frac{b}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

- 三角形：形心在三条中线交点处，距底边为 $h/3$，距顶点为 $2h/3$。

- 直角三角形，两直角边分别为 a, b，坐标原点取直角顶点：

$$\bar{x} = \frac{a}{3}, \qquad \bar{y} = \frac{b}{3}$$

- 半圆，半径 R：形心在对称轴上，距直径边：

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

- 四分之一圆，半径 R，坐标轴取两条半径：

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

5.2 惯性矩、惯性积与极惯性矩

$$I_z = \int_A y^2 \, dA, \qquad I_y = \int_A z^2 \, dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA$$

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA = I_y + I_z$$

惯性半径：

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

5.3 平行移轴公式

设 y_c, z_c 为形心轴，新 z 轴相对 z_c 轴沿 y 方向偏移 a，新 y 轴相对 y_c 轴沿 z 方向偏移 b：

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

5.4 转轴公式与主惯性矩

坐标轴转过角 α 后：

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = -\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

主轴条件：

$$I_{y_1 z_1} = 0$$

主轴方位：

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

主惯性矩：

$$I_{\max,\min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}$$

5.5 常用截面几何性质

矩形，宽 b，高 h，对形心轴：

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

圆形，直径 d：

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$

空心圆，外径 D，内径 d，$\alpha = d/D$：

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$

空心矩形，外尺寸 $b_0 \times h_0$，内尺寸 $b \times h$：

$$I_z = \frac{b_0 h_0^3 - bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{I_z}{h_0/2}$$

6. 弯曲应力

6.1 纯弯曲正应力

曲率关系：

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

弯曲正应力：

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

最大弯曲正应力：

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

弯曲强度条件：

$$\frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

非对称截面受弯时，拉、压边缘分别校核：

$$\sigma_t = \frac{My_t}{I_z}, \qquad \sigma_c = \frac{My_c}{I_z}$$

6.2 弯曲切应力

横力弯曲切应力：

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

其中 S_z^* 为所求点一侧面积对中性轴 z 的静矩，b 为该处截面宽度。

矩形截面：

$$\tau = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3F_S}{2A}$$

圆形截面：

$$\tau_{\max} = \frac{4F_S}{3A}$$

工字形截面腹板处常用：

$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_{z,\max}^*}{I_z d}$$

其中 d 为腹板厚度。

7. 弯曲变形

7.1 挠度与转角

挠曲线：

$$w = w(x)$$

小变形下转角：

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dw}{dx} = w'$$

课件符号下的近似微分方程：

$$EI_z w'' = M(x)$$

积分法：

$$EI_z w' = \int M(x)\,dx + C$$

$$EI_z w = \int \left[\int M(x)\,dx\right] dx + Cx + D$$

常用边界条件：

$$\text{铰支或滚支处：} w = 0$$

$$\text{固定端：} w = 0, \quad \theta = 0$$

$$\text{对称截面：} \theta = 0$$

$$\text{连续点：} w, \theta \text{ 连续}$$

取挠度正向与课件相反时，微分方程符号相应改变。

7.2 常用梁变形公式

悬臂梁，自由端受集中力 F：

$$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}, \qquad w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

悬臂梁，自由端受力偶 M_e：

$$\theta_B = \frac{M_e l}{EI}, \qquad w_B = \frac{M_e l^2}{2EI}$$

悬臂梁，全跨均布载荷 q：

$$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}, \qquad w_B = \frac{ql^4}{8EI}$$

简支梁，跨中集中力 F：

$$\theta_A = \theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$w_C = \frac{Fl^3}{48EI}$$

简支梁，全跨均布载荷 q：

$$\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$w_C = \frac{5ql^4}{384EI}$$

简支梁，一集中力 F 作用于距左支座 a、距右支座 b 处，$l = a + b$：

$$w_C = \frac{Fa^2b^2}{3EIl}$$

8. 应力状态与应变状态

8.1 平面应力变换

已知 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$，斜截面法线与 x 轴夹角为 α：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

主平面方位：

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

主应力：

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

最大切应力：

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

最大切应力平面：

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

莫尔圆：

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

8.2 三向应力状态

主应力排序：

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

最大正应力：

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

最大切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

8.3 广义胡克定律

主应力方向：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

剪切：

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

体积应变：

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

平均应力：

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

畸变能密度：

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

9. 强度理论

前四种强度理论统一按相当应力校核：

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

按材料选用：

- **塑性材料（典型：低碳钢）**：主要防止屈服，常用第三或第四强度理论。
- **脆性材料（典型：铸铁）**：主要防止断裂，常用第一或第二强度理论；拉、压许用应力不同时用莫尔强度理论。

9.1 第一强度理论：最大拉应力理论

相当应力：

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

9.2 第二强度理论：最大伸长线应变理论

相当应力：

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

9.3 第三强度理论：最大切应力理论

相当应力：

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

9.4 第四强度理论：畸变能密度理论

相当应力：

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$

9.5 莫尔强度理论

拉压许用应力不同时，常用形式：

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 \leq [\sigma_t]$$

10. 组合变形

10.1 叠加原理

在线弹性、小变形条件下：

$$\sigma = \sum \sigma_i, \qquad \tau = \sum \tau_i, \qquad \Delta = \sum \Delta_i$$

10.2 拉压与弯曲组合

轴向力与单向弯曲：

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z y}{I_z}$$

双向弯曲并含轴力：

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

按截面各点取最大拉、压应力校核。

偏心拉压，偏心距 e：

$$M = Fe$$
$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{Fe}{W}$$

10.3 圆轴弯曲与扭转组合

弯曲正应力：

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

扭转切应力：

$$\tau = \frac{T}{W_t}$$

圆截面中：

$$W_t = 2W$$

危险点处平面应力的主应力：

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \qquad \sigma_2 = 0$$

按第三强度理论：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

对圆轴代入 $W_t = 2W$：

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} \le [\sigma]$$

按第四强度理论：

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

对圆轴代入 $W_t = 2W$：

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2} \le [\sigma]$$

10.4 拉弯扭组合

危险点正应力：

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = \frac{M}{W} + \frac{F_N}{A}$$

危险点切应力：

$$\tau = \frac{T}{W_t}$$

再按第三或第四强度理论校核：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]$$

11. 压杆稳定

11.1 欧拉临界力

有效长度：

$$l_0 = \mu l$$

欧拉公式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

应取可能失稳方向中的最小惯性矩 $I_{\min}$。

常用长度系数：

支承情况	μ
两端铰支	1
一端固定一端自由	2
两端固定	0.5
一端固定一端铰支	0.7

11.2 柔度与临界应力

惯性半径：

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

柔度：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

欧拉临界应力：

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

欧拉公式适用界限：

$$\lambda \geq \lambda_p$$

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

11.3 中、小柔度压杆

中柔度压杆直线经验公式：

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

与屈服极限分界：

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

小柔度压杆：

$$\sigma_{cr} \approx \sigma_s$$

11.4 稳定校核

稳定许用应力：

$$[\sigma]_{st} = \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}$$

稳定条件：

$$\sigma_c = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{st}$$

或：

$$F \leq \frac{F_{cr}}{n_{st}}$$

12. 能量法

12.1 基本应变能

正应力应变能密度：

$$v_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

切应力应变能密度：

$$v_\gamma = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{G\gamma^2}{2}$$

拉压杆：

$$V_N = \int \frac{F_N^2}{2EA}\,dx$$

圆轴扭转：

$$V_T = \int \frac{T^2}{2GI_p}\,dx$$

梁弯曲：

$$V_M = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

必要时考虑剪切应变能：

$$V_S = \int \frac{\alpha_s F_S^2}{2GA}\,dx$$

总应变能：

$$V_\varepsilon = \int \frac{F_N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{T^2}{2GI_p}\,dx + \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{\alpha_s F_S^2}{2GA}\,dx$$

12.2 克拉佩龙定理

线弹性体系：

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i F_i\delta_i$$

12.3 卡氏定理

第一定理：

$$F_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \delta_i}$$

第二定理：

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$$

对常见内力形式：

$$\delta_i = \int \frac{F_N}{EA}\frac{\partial F_N}{\partial F_i}\,dx + \int \frac{T}{GI_p}\frac{\partial T}{\partial F_i}\,dx + \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F_i}\,dx$$

桁架：

$$\delta_i = \sum_j \frac{F_{Nj} l_j}{E_j A_j}\frac{\partial F_{Nj}}{\partial F_i}$$

12.4 单位载荷法与莫尔积分

在所求位移方向施加单位广义力，得到单位载荷内力 $\bar{F}_N, \bar{T}, \bar{M}, \bar{F}_S$：

$$\Delta = \int \frac{F_N \bar{F}_N}{EA}\,dx + \int \frac{T\bar{T}}{GI_p}\,dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx + \int \frac{\alpha_s F_S \bar{F}_S}{GA}\,dx$$

梁弯曲问题中最常用的是只保留弯矩项的莫尔积分：

$$\Delta = \int \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\,dx$$

若 EI 为常数：

$$\Delta = \frac{1}{EI}\int M(x)\bar{M}(x)\,dx$$

分段梁或 EI 分段常量时：

$$\Delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_i(x)\bar{M}_i(x)}{E_i I_i}\,dx$$

求指定点挠度：在该点沿所求位移方向施加单位力，作单位载荷弯矩图 $\bar{M}$。

求指定截面转角：在该截面沿所求转角方向施加单位力偶，作单位力偶弯矩图 $\bar{M}_\theta$：

$$\theta = \int \frac{M(x)\bar{M}_\theta(x)}{EI}\,dx$$

当某一段内 EI 为常数，且至少有一个弯矩图为直线时，可用图乘法：

$$\int_{l_i} \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\,dx = \frac{\omega_i y_{Ci}}{EI}$$

分段求和：

$$\Delta = \sum_i \frac{\omega_i y_{Ci}}{E_i I_i}$$

取曲线图面积 ω_i，在直线图上取形心对应纵坐标 y_{Ci}。两图同侧取正，异侧取负。

图乘法常用面积与形心位置：

- 矩形，高 h，长 l：

$$\omega = hl, \qquad x_C = \frac{l}{2}$$

- 三角形，高 h，底 l：

$$\omega = \frac{1}{2}hl, \qquad x_{C,\text{距高端}} = \frac{l}{3}, \qquad x_{C,\text{距零端}} = \frac{2l}{3}$$

- 端点为零、另一端高 h 的二次抛物线 $y = h(x/l)^2$：

$$\omega = \frac{1}{3}hl, \qquad x_C = \frac{3l}{4}\text{（距零端）}$$

- 两端为零、中点高 h 的对称二次抛物线：

$$\omega = \frac{2}{3}hl, \qquad x_C = \frac{l}{2}$$

桁架：

$$\Delta = \sum_j \frac{F_{Nj}\bar{F}_{Nj}l_j}{E_jA_j}$$

12.5 互等定理

线弹性结构中：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

13. 超静定结构

13.1 力法基本方程

一次超静定：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

n 次超静定：

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}X_j + \Delta_{iF} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

其中：

- X_j 为多余约束力或多余约束力偶。
- δ_{ij} 为基本体系在单位多余力 $X_j = 1$ 作用下，于 X_i 方向产生的位移。
- Δ_{iF} 为基本体系在原载荷作用下，于 X_i 方向产生的位移。

13.2 位移系数

只考虑弯曲时：

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI}\, dx$$

$$\Delta_{iF} = \int \frac{M_i M_F}{EI}\, dx$$

若轴力、扭矩不可忽略，则叠加相应能量项：

$$\delta_{ij} = \int \frac{F_{Ni} F_{Nj}}{EA}\, dx + \int \frac{T_i T_j}{GI_p}\, dx + \int \frac{M_i M_j}{EI}\, dx$$

位移系数对称：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

14. 动载荷

14.1 动荷系数

动荷系数定义：

$$K_d = \frac{\text{动响应}}{\text{静响应}}$$

常用关系：

$$P_d = K_d P, \qquad \Delta_d = K_d \Delta_{st}, \qquad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

强度校核：

$$\sigma_d \le [\sigma]$$

14.2 动静法

惯性力：

$$F_i = -ma$$

加速度提升总重 P 的构件：

$$F_{Nd} = P\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

若被提升物重 P_0，同时考虑构件自重 qL：

$$F_{Nd} = (P_0 + qL)\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

14.3 转动薄圆环

薄圆环平均直径 D、角速度 ω、材料单位体积重量 γ：

$$\sigma_d = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g}$$

令 $v = \omega D/2$，则：

$$\sigma_d = \frac{\gamma v^2}{g}$$

若使用质量密度 $\rho = \gamma/g$：

$$\sigma_d = \rho v^2$$

14.4 竖直冲击

先求静位移 Δ_{st}，再用能量法求动荷系数。

落高 h：

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

突加载荷 $h = 0$：

$$K_d = 2$$

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}, \qquad \sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

14.5 水平冲击

质量对应的重量 P，冲击速度 v，对应静位移 Δ_{st}：

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

解得：

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2}{g}\Delta_{st}}$$

动荷系数：

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

15. 交变应力与疲劳

15.1 交变应力参数

最大应力与最小应力：

$$\sigma_{\max}, \qquad \sigma_{\min}$$

应力比：

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

应力幅：

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

平均应力：

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

也可反推：

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \qquad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$$

15.2 循环类型

对称循环：

$$r = -1, \qquad \sigma_m = 0, \qquad \sigma_a = \sigma_{\max}$$

脉动循环：

$$r = 0, \qquad \sigma_{\min} = 0, \qquad \sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}$$

静应力：

$$r = 1, \qquad \sigma_a = 0, \qquad \sigma_m = \sigma_{\max} = \sigma_{\min}$$

15.3 疲劳极限

材料能承受无限次循环而不破坏的最大应力，称为疲劳极限或持久极限：

$$\sigma_r$$

对称循环疲劳极限常记为：

$$\sigma_{-1}$$

有色金属等无明显水平段时，可取规定循环次数 N_0 下的最大应力作为条件疲劳极限。

15.4 影响疲劳极限的因素

- 外形突变导致应力集中，疲劳极限降低。
- 截面尺寸增大，疲劳极限通常降低。
- 表面质量提高，疲劳极限提高。
- 提高疲劳强度的措施：减缓应力集中，提高表面光洁度，增强表面强度。

16. 做题流程速查

- **强度**：画受力图求内力 $\to$ 找危险截面与危险点 $\to$ 写出 σ, τ $\to$ 单一应力直接校核，复杂应力求主应力或相当应力 $\to$ 与许用应力比较。
- **刚度**：写变形公式或微分方程 $\to$ 代入边界/连续条件或叠加公式 $\to$ 校核 Δ、θ、φ'。
- **稳定**：确定 μ $\to$ 取最小惯性矩方向求 $i = \sqrt{I/A}$ $\to$ 求 $\lambda = \mu l/i$ $\to$ 按柔度范围选欧拉公式、经验公式或屈服控制 $\to$ 校核 $F \le F_{cr}/n_{st}$。
- **超静定**：判断超静定次数 $\to$ 解除多余约束建立基本体系 $\to$ 写协调方程 $\to$ 用单位载荷法求 δ_{ij}、Δ_{iF} $\to$ 解多余力，回原结构求内力/应力/位移。